Funzioni reali

Dal grafico alle proprietà delle funzioni

Obiettivi

- definire una funzione reale
- definire e rappresentare su una retta orientata un intervallo (*intervalli aperti o chiusi, limitati o illimitati*)
- conoscere il tipo di funzione e classificarla
- riconoscere dal grafico di una funzione le sue caratteristiche (gli zeri e gli intervalli di positività e negatività di una funzione, …)

La funzione reale

- Dati due insiemi non vuoti A, $B \subseteq \mathbf{R}$, una **funzione** f da A in B è una *relazione* fra A e B (*cioè un insieme di coppie ordinate*) tale che a ogni elemento x di A corrisponde *uno ed un solo* elemento y di B

- A è detto ***dominio*** o ***campo di esistenza*** (C.E.)

ULTERIORI INFORMAZIONI...

Per dominio A di una funzione, in generale, si intende l'insieme più ampio degli elementi sui quali la funzione agisce e può variare da situazione a situazione.

Esempio

- $y=k\cdot x^2$ *con k costante positiva.*

  Questa funzione può essere interpretata come:

  – *y* è lo spazio percorso da un corpo in caduta libera, nel tempo *x* e in tal caso il dominio *A* coincide con l'insieme dei *numeri reali positivi*

  – *l'equazione di una parabola e quindi* il dominio *A* coincide con l'insieme dei *numeri reali*

  – *y* è il ricavo che si ottiene vendendo *x* oggetti e quindi il dominio *A* coincide con l'insieme dei *numeri naturali*

Dominio di una funzione

In pratica il dominio di una funzione è l'insieme di tutti i valori *x* per i quali esiste (è possibile calcolare) l'immagine.

Per questi valori si dice che la funzione non perde di significato.

Terminologia della funzione

- Data la funzione

$$f\colon A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y=f(x)$$

- Diremo che
  - *x* è la *variabile indipendente* ed *y* è la *variabile dipendente.*
  - *x* è detta *controimmagine* di *y* tramite *f mentre y* è l'*immagine* di *x* tramite *f*
  - *f(x)* è l'*espressione analitica* della funzione e serve, fissato il valore per *x*, a determinarne l'immagine
  - il *codominio* è l'insieme delle immagini

Esempio

- Data la funzione $f: A \longrightarrow B$
- In tal caso $x \longmapsto y = x^2 - 3x - 1$
  - x^2-3x-1 è l'*espressione analitica* della funzione
  - fissato il valore per *x, ad esempio -2, la corrispondente immagine y è data sostituendo ad x, nell'espressione analitica, il valore -2*

$$y = (-2)^2 - 3(-2) - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$$

Dunque l'immagine di -2 è 9.

ULTERIORI INFORMAZIONI...

La coppia ordinata (-2; 9) è un elemento della funzione data. In un piano cartesiano la coppia è rappresentata da un punto.

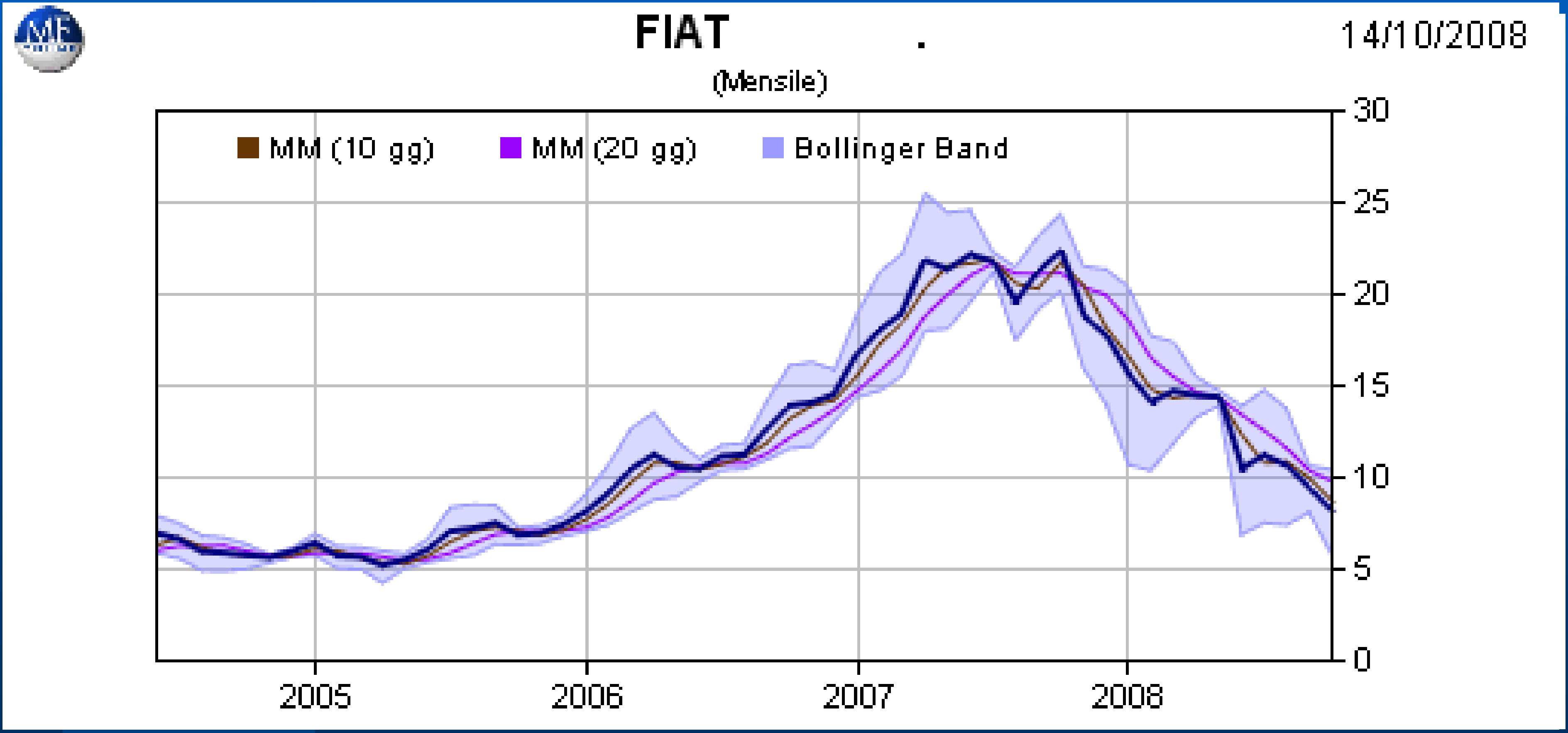
Grafico di una funzione

- La funzione è un insieme di *coppie ordinate*.
- Ad ogni coppia ordinata corrisponde *un punto* sul piano cartesiano
- L'*insieme* di questi *punti* ci da il *grafico della funzione*.

Dunque

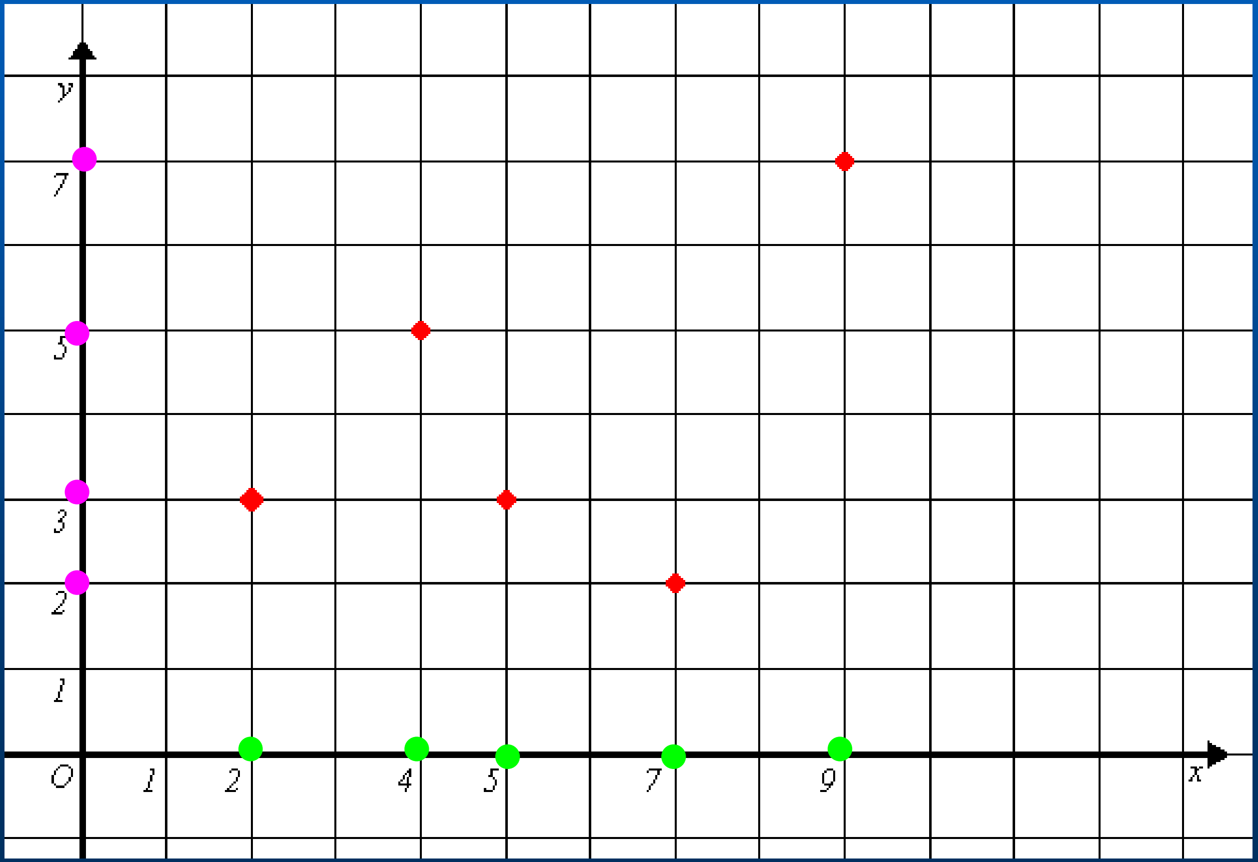
Il grafico di una funzione è l'insieme dei punti che appartengono alla funzione

Dal grafico alle proprietà della funzione



Esercizio: stabilire se il seguente grafico rappresenta una funzione e in caso affermativo individuare il dominio e il codominio

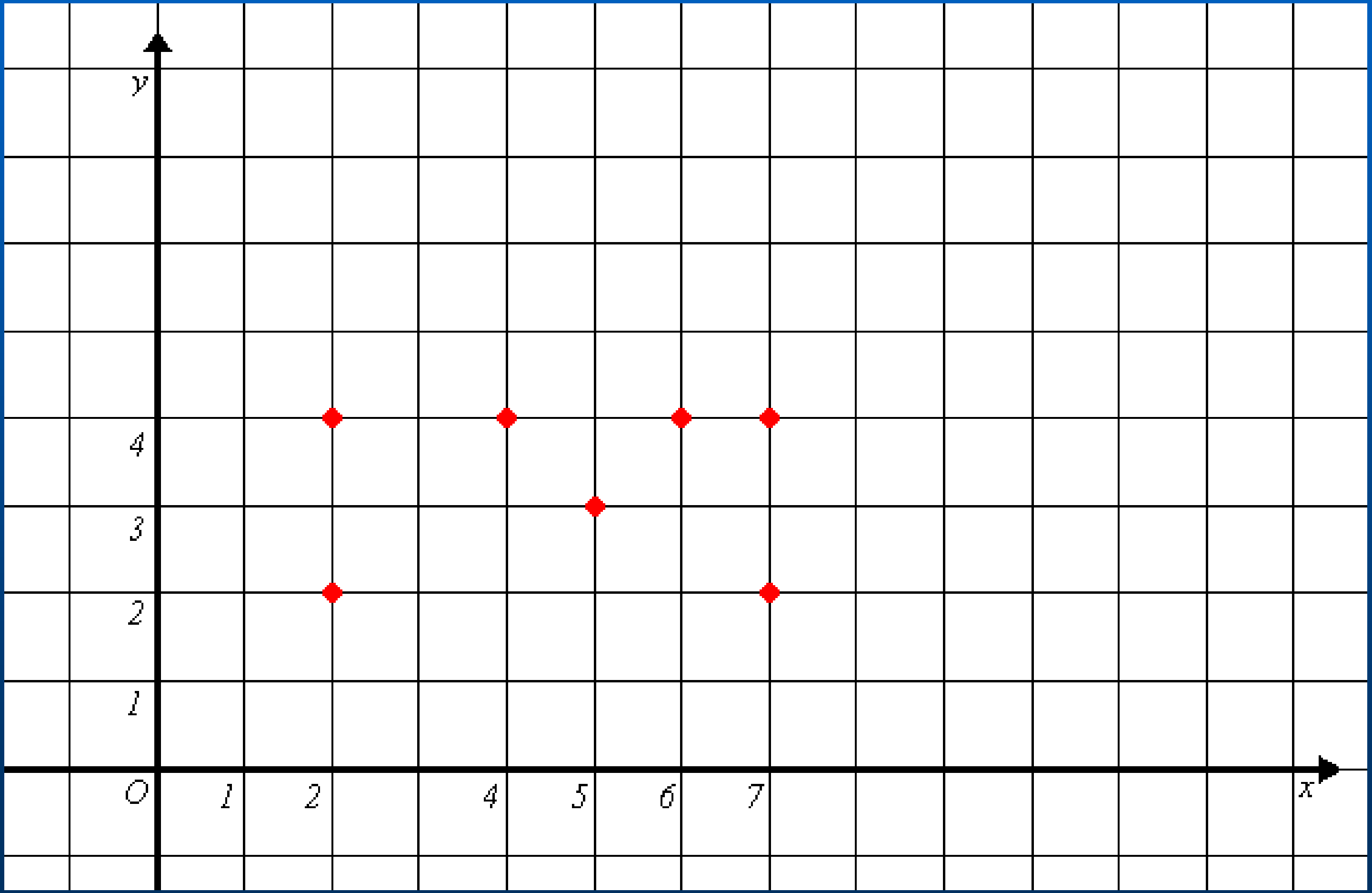
- È una funzione $f = \{(2, 3), (4, 5), (5, 3), (7, 2), (9, 7)\}$
- $\mathrm{Dom}f = \{2, 4, 5, 7, 9\}$
- $\mathrm{Cod}f = \{2, 3, 5, 7\}$



Esercizio: stabilire se il seguente grafico rappresenta una funzione e in caso affermativo individuare il dominio e il codominio

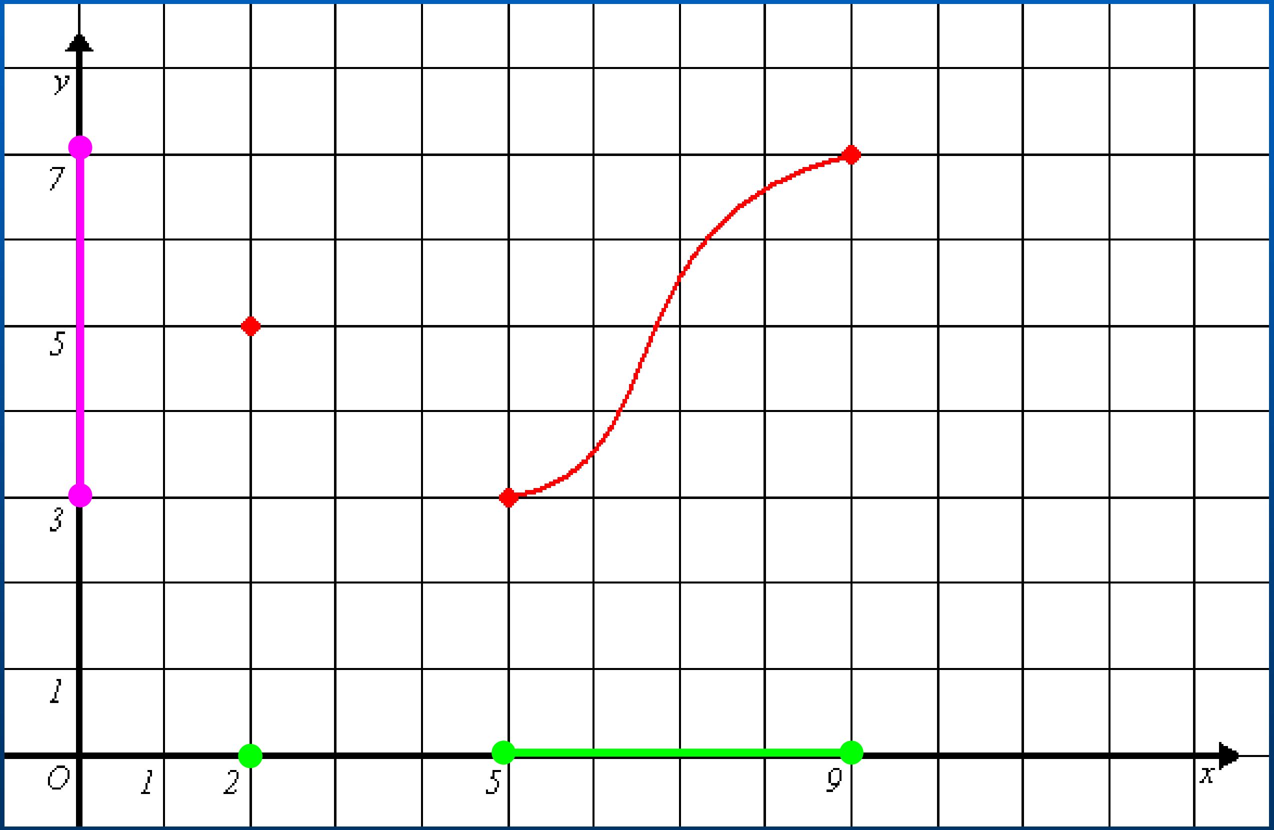
- Non è una funzione

  in quanto, ad esempio, l'elemento 2 ha due immagini, 2 e 4



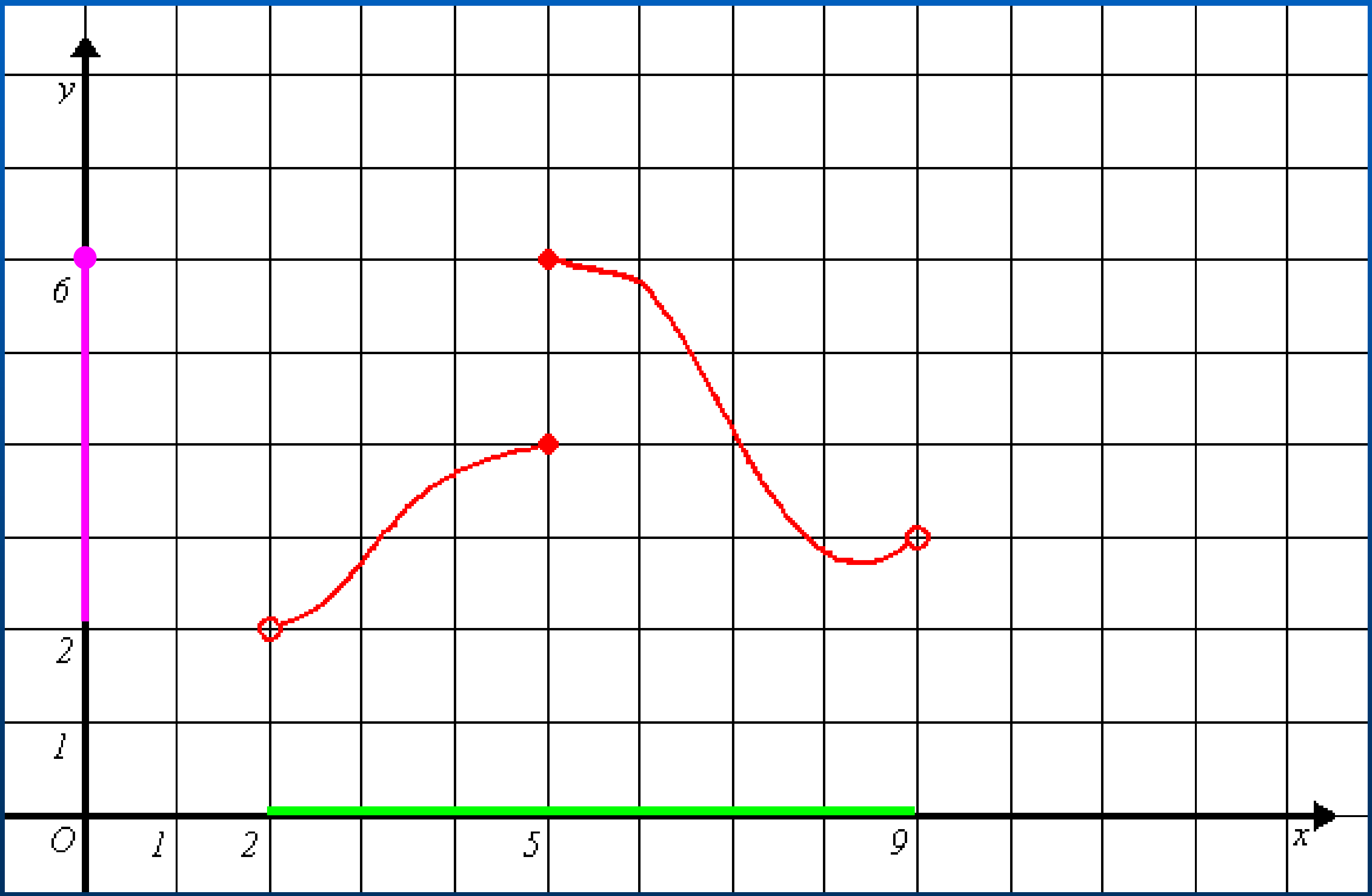
Esercizio: stabilire se il seguente grafico rappresenta una funzione e in caso affermativo individuare il dominio e il codominio

- È una funzione
- Dom$f$ = {2} ∪ [5,9]
- Cod$f$ = [3, 7]



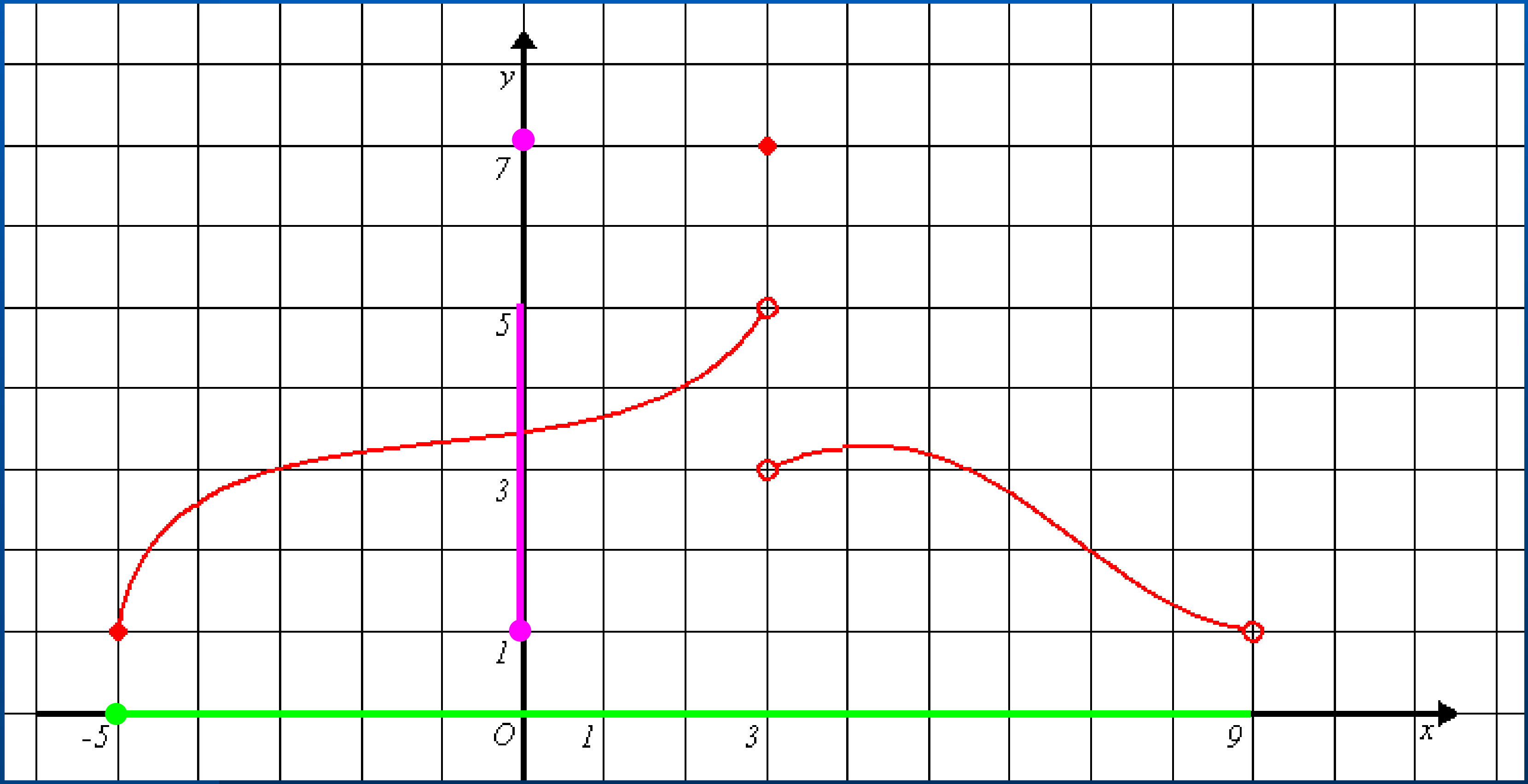
Esercizio: stabilire se il seguente grafico rappresenta una funzione e in caso affermativo individuare il dominio e il codominio

- È una funzione
- Dom$f$ = (2, 9)
- Cod$f$ = (2, 6)



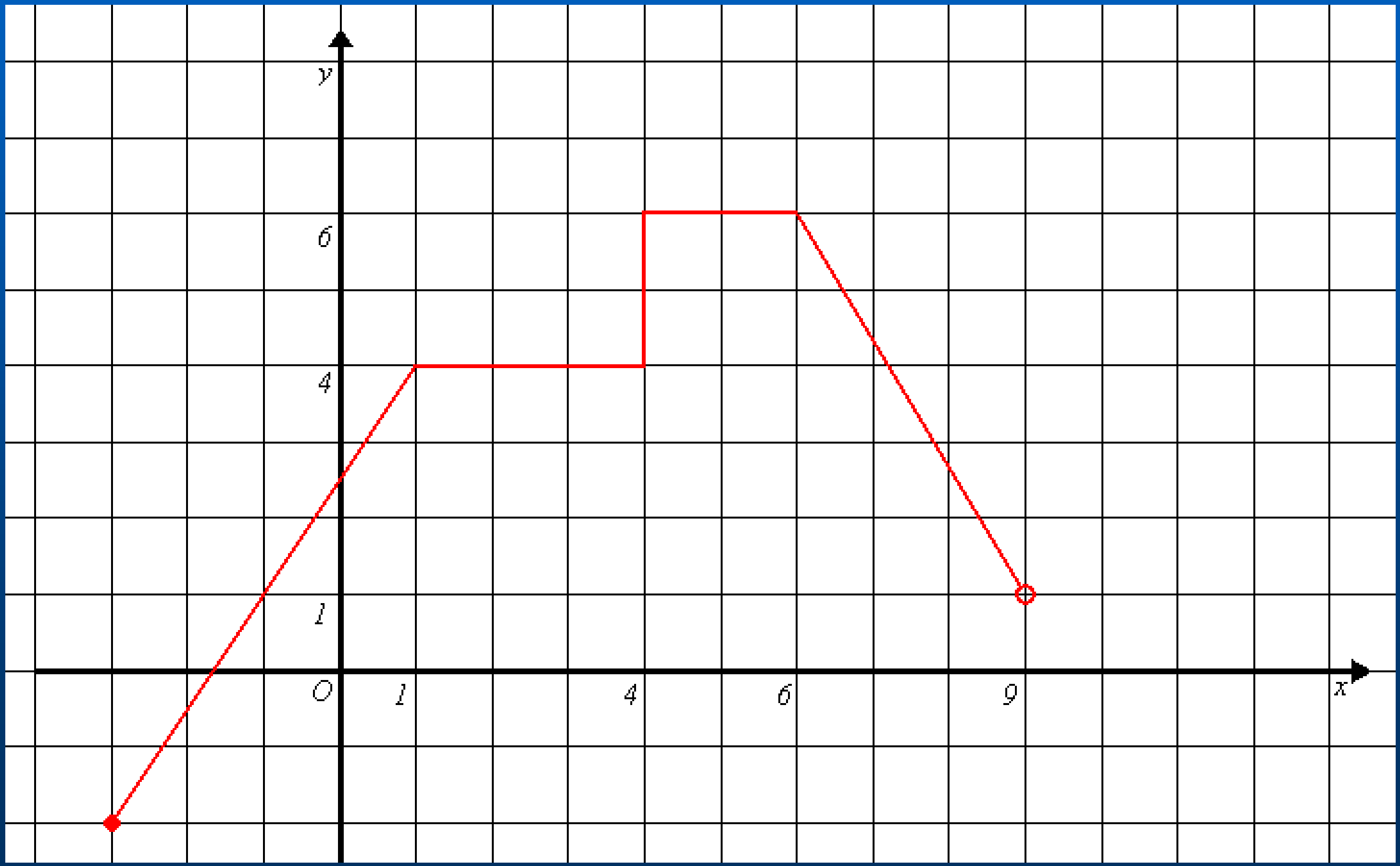
Esercizio: stabilire se il seguente grafico rappresenta una funzione e in caso affermativo individuare il dominio e il codominio

- È una funzione
- Dom$f$ = [-5, 9)
- Cod$f$ = [1, 5) ∪ {7}



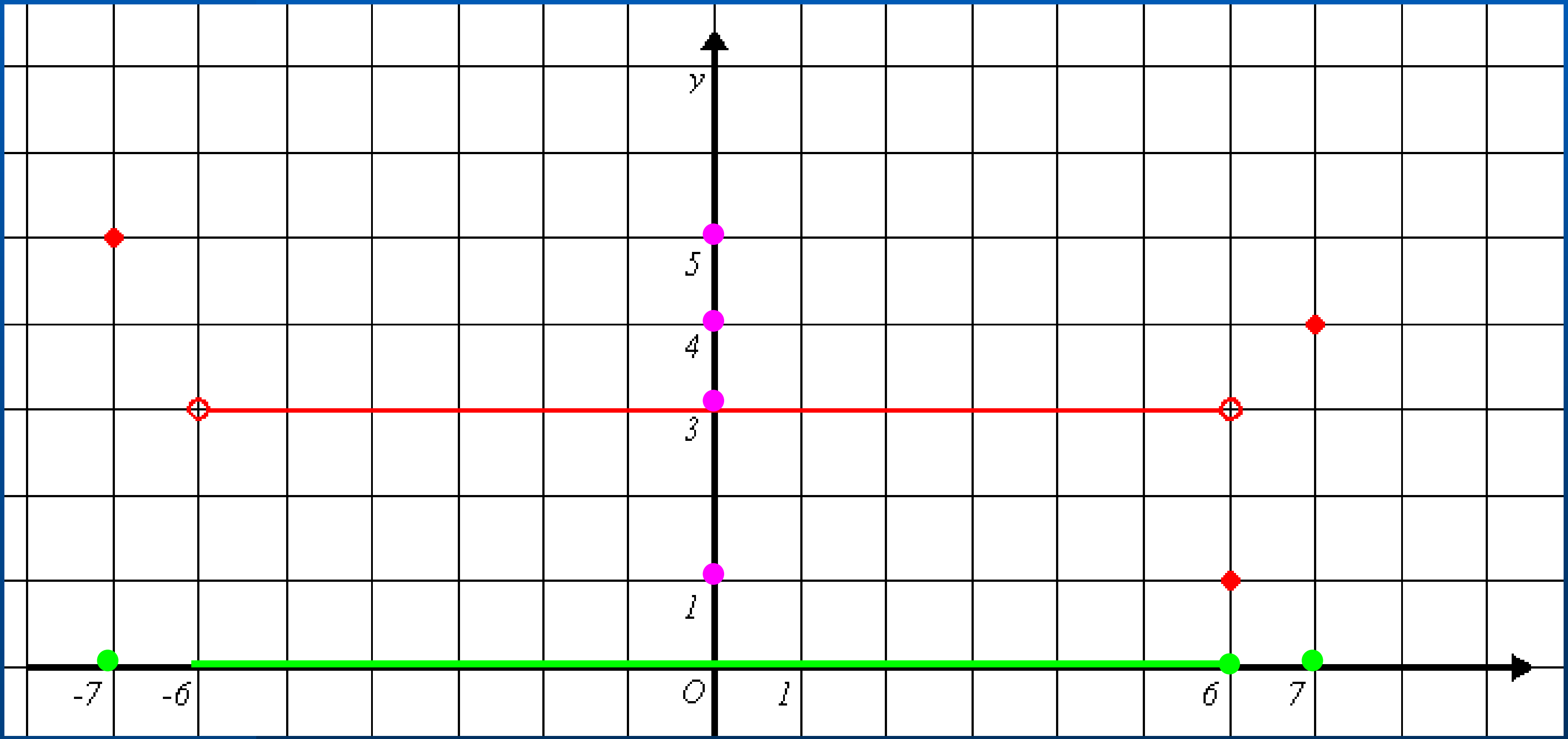
Esercizio: stabilire se il seguente grafico rappresenta una funzione e in caso affermativo individuare il dominio e il codominio

- Non è una funzione
- In quanto l'elemento 4 del dominio ha infinite immagini, un qualsiasi y con *4<y<6*



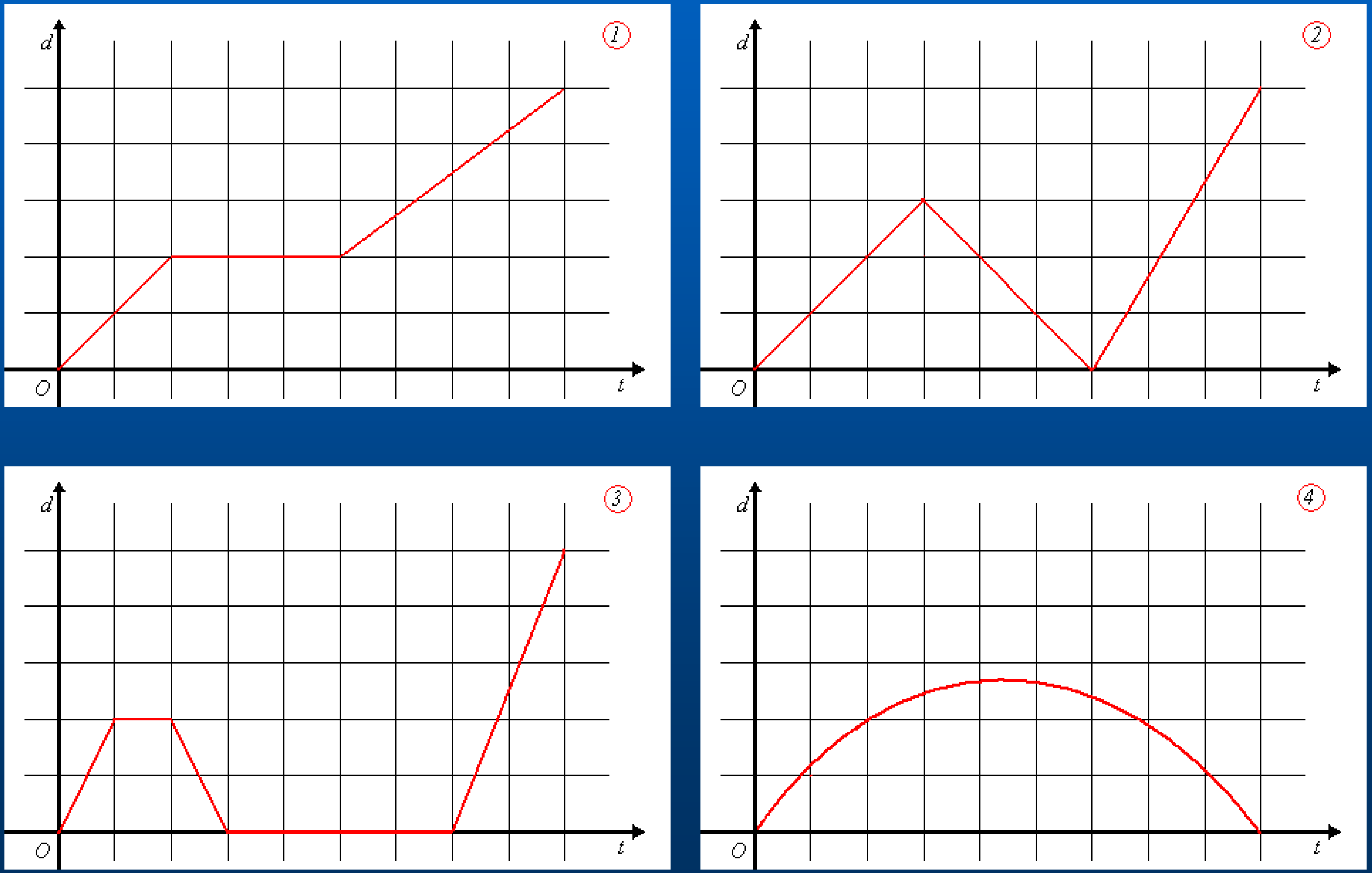
Esercizio: stabilire se il seguente grafico rappresenta una funzione e in caso affermativo individuare il dominio e il codominio

- È una funzione
- Dom$f$ = {-7} ∪ (-6, 6] ∪ {7}
- Cod$f$ = {1, 3, 4, 5}



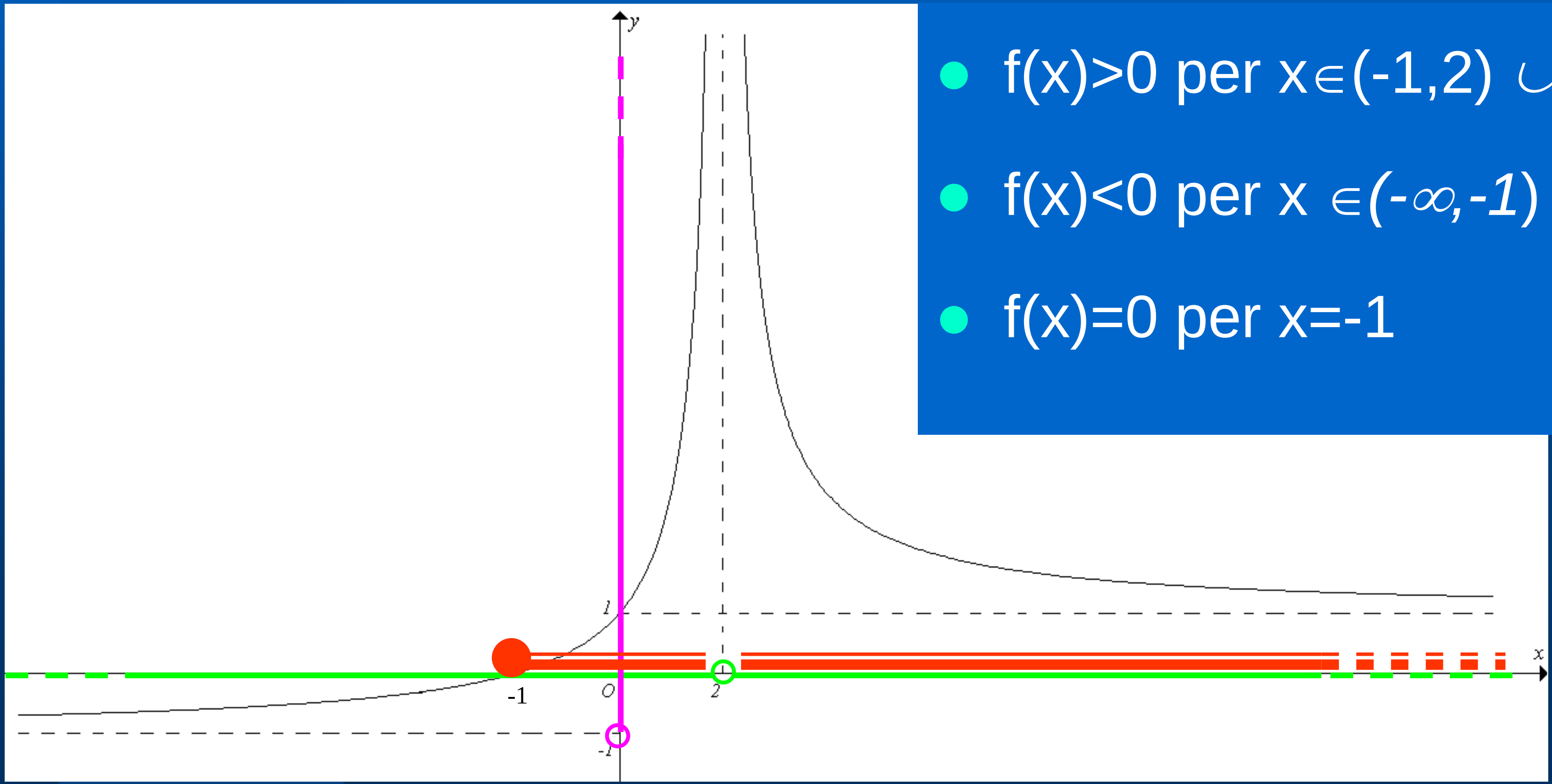
Quale grafico rappresenta questa storiella?

… appena uscito di casa, camminai di passo svelto per potermi fermare a prendere un caffè. Mentre lo sorseggiavo mi accorsi di essermi dimenticato alcuni documenti a casa. Tornai per trovarli e quindi ripartii velocemente per essere in orario al lavoro.



Esercizio: individuare il dominio, il codominio, dove la funzione è positiva, negativa e nulla

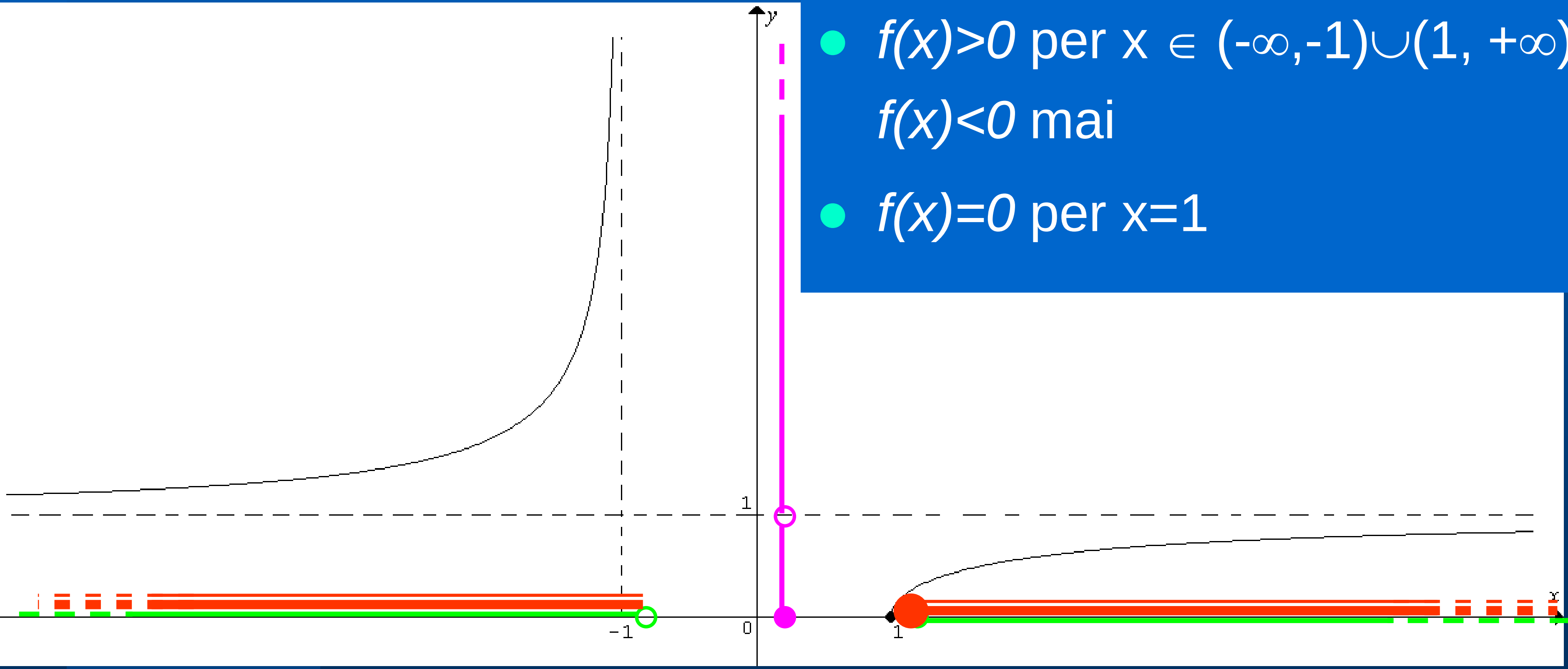
- *Domf* = $(-\infty,2) \cup (2, +\infty)$
- Codf = $(-1, +\infty)$



- f(x)>0 per $x \in (-1,2) \cup (2, +\infty)$
- f(x)<0 per $x \in (-\infty,-1)$
- f(x)=0 per x=-1

Esercizio: individuare il dominio, il codominio, dove la funzione è positiva, negativa e nulla

- Dom$f$ = $(-\infty,-1) \cup (1, +\infty)$
- Cod$f$ = $[0, 1)\cup(1,+\infty)$

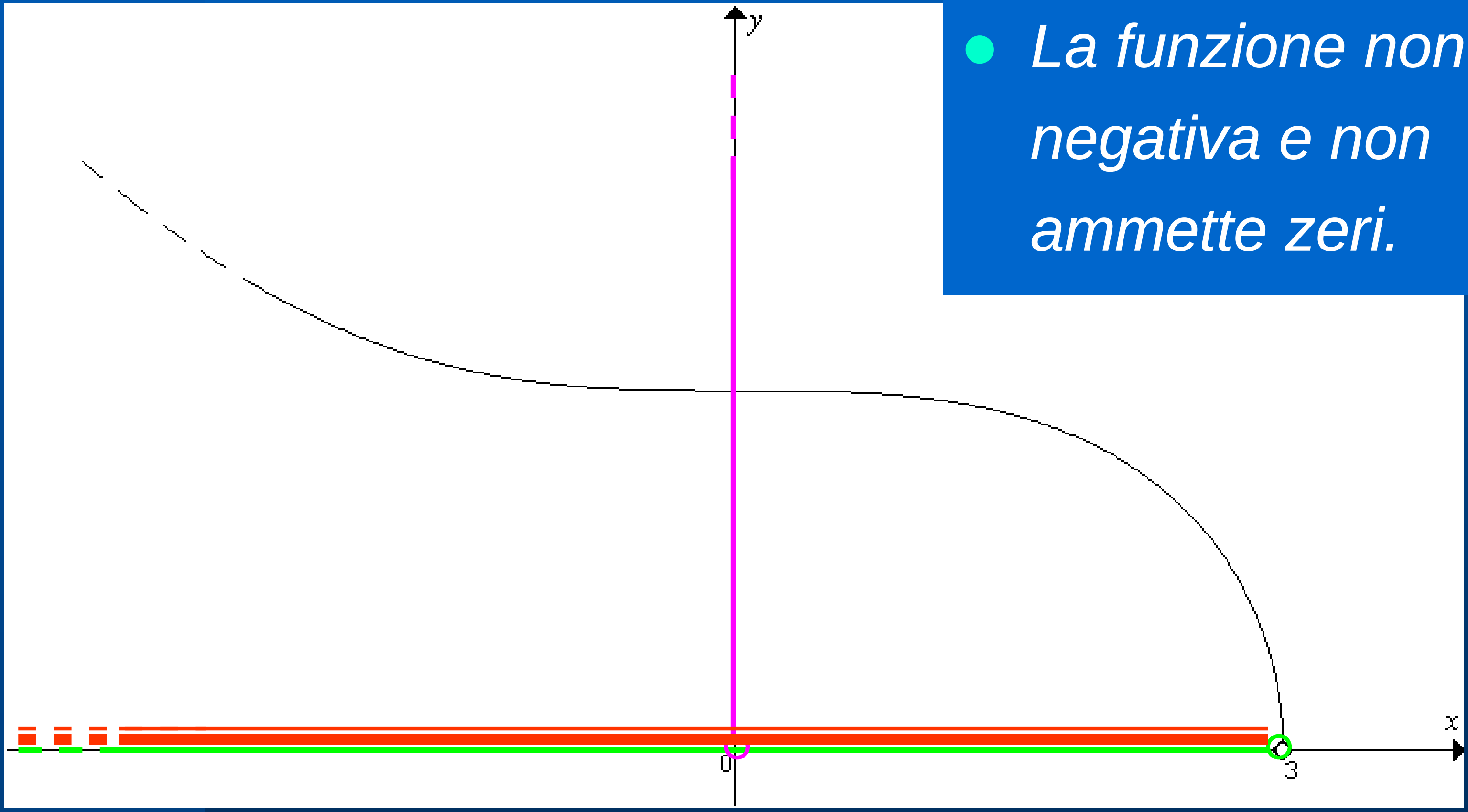


- $f(x)>0$ per $x \in (-\infty,-1)\cup(1, +\infty)$

  $f(x)<0$ mai
- $f(x)=0$ per $x=1$

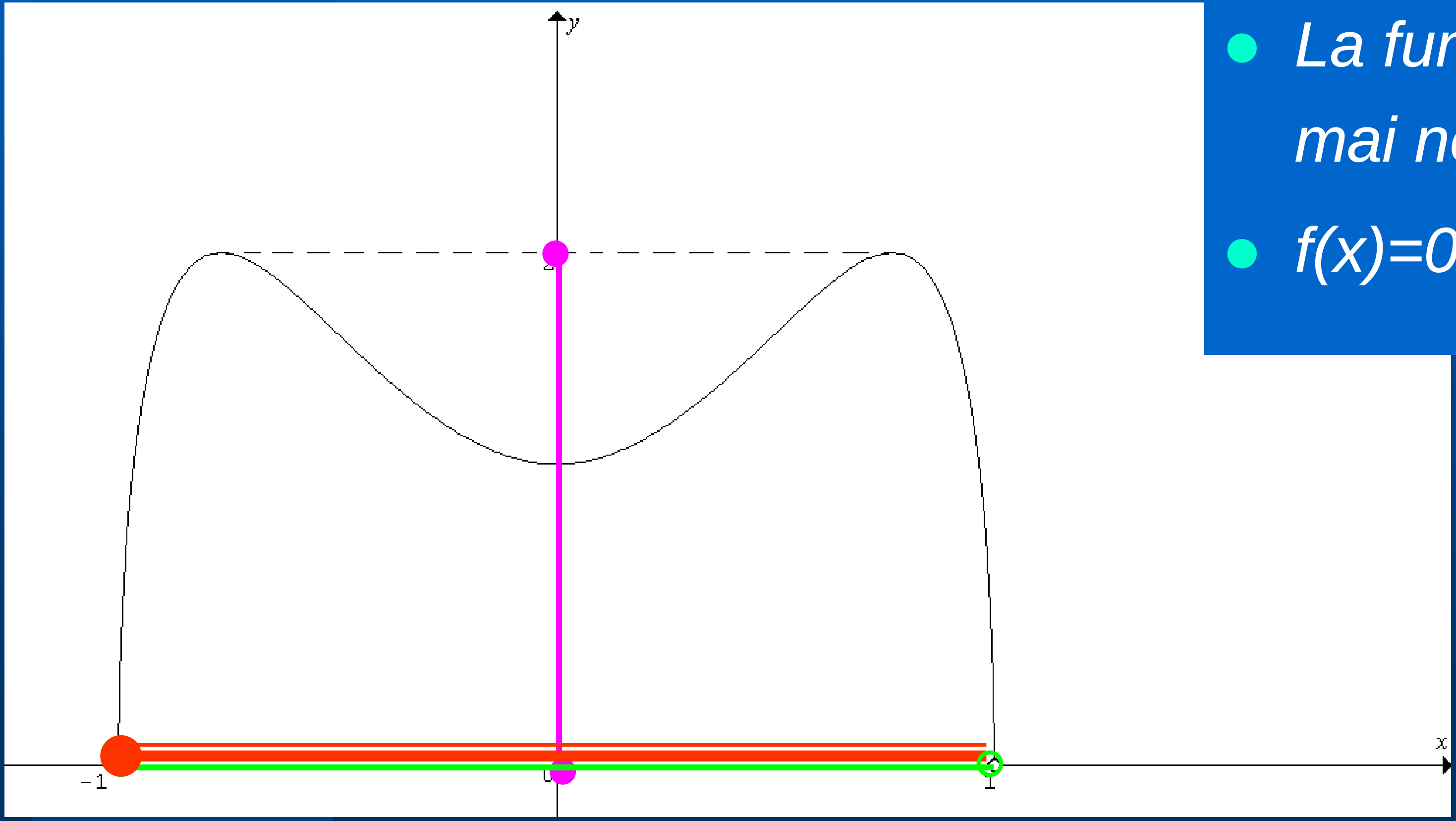
Esercizio: individuare il dominio, il codominio, dove la funzione è positiva, negativa e nulla

- Dom*f* = $(-\infty, 3)$
- Cod*f* = $]0, +\infty)$
- *f(x)>0* per x<3
- *La funzione non è mai negativa e non ammette zeri.*



Esercizio: individuare il dominio, il codominio, dove la funzione è positiva, negativa e nulla

- *Domf = [-1,1)*
- *Codf = [0, 2]*
- *f(x)>0 per -1<x<1*
- *La funzione non è mai negativa*
- *f(x)=0 per x=-1*



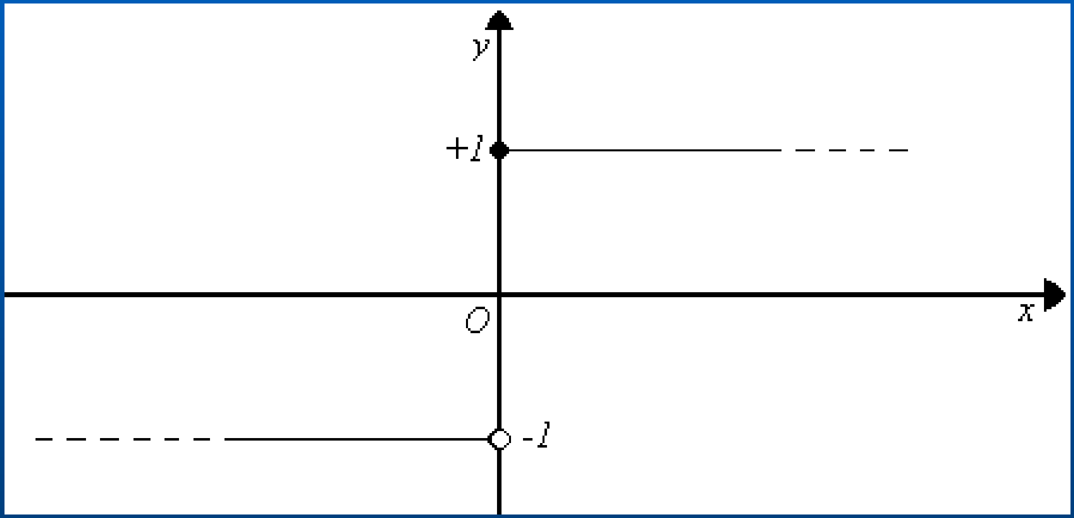
Alcune caratteristiche delle funzioni

- Funzioni a tratti
- Funzioni pari, dispari
- Funzioni monotòne
- Punti estremanti

Funzioni a tratti

- È una funzione
- Il dom*f*=**R**
- Il cod*f*={-1, 1}
- Qual'è potrebbe essere l'espressione analitica?
- In questo caso la funzione è definita tramite due equazione cioè due espressioni analitiche

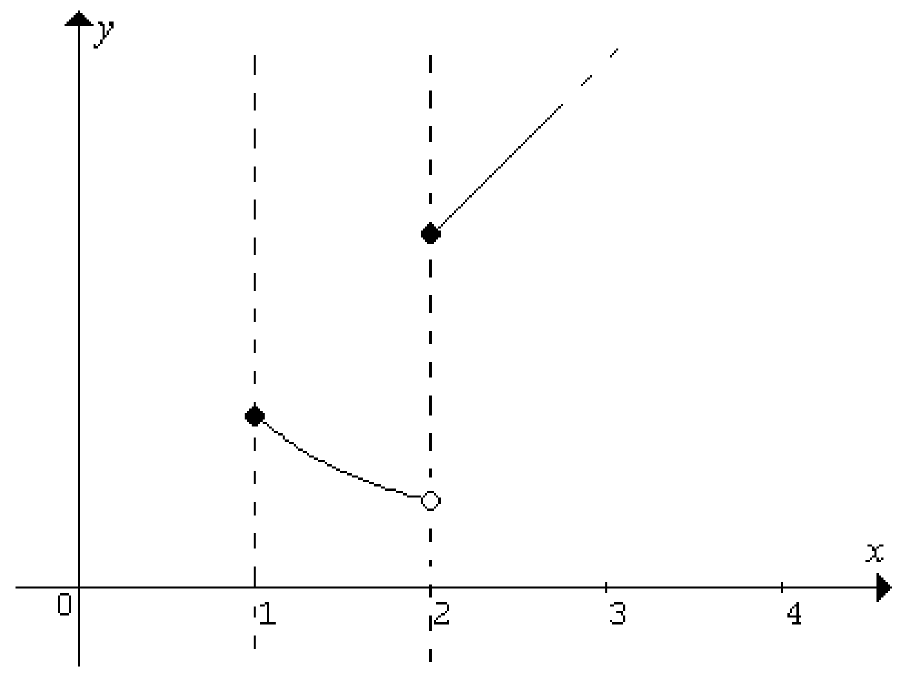
- Osserva il seguente grafico



$$f(x)=\begin{cases}+1 & se \quad x\geq 0\\ -1 & se \quad x<0\end{cases}$$

Funzioni a tratti

- Una funzione è a tratti se per definirla nel suo dominio occorrono due o più equazioni.
- Esempio



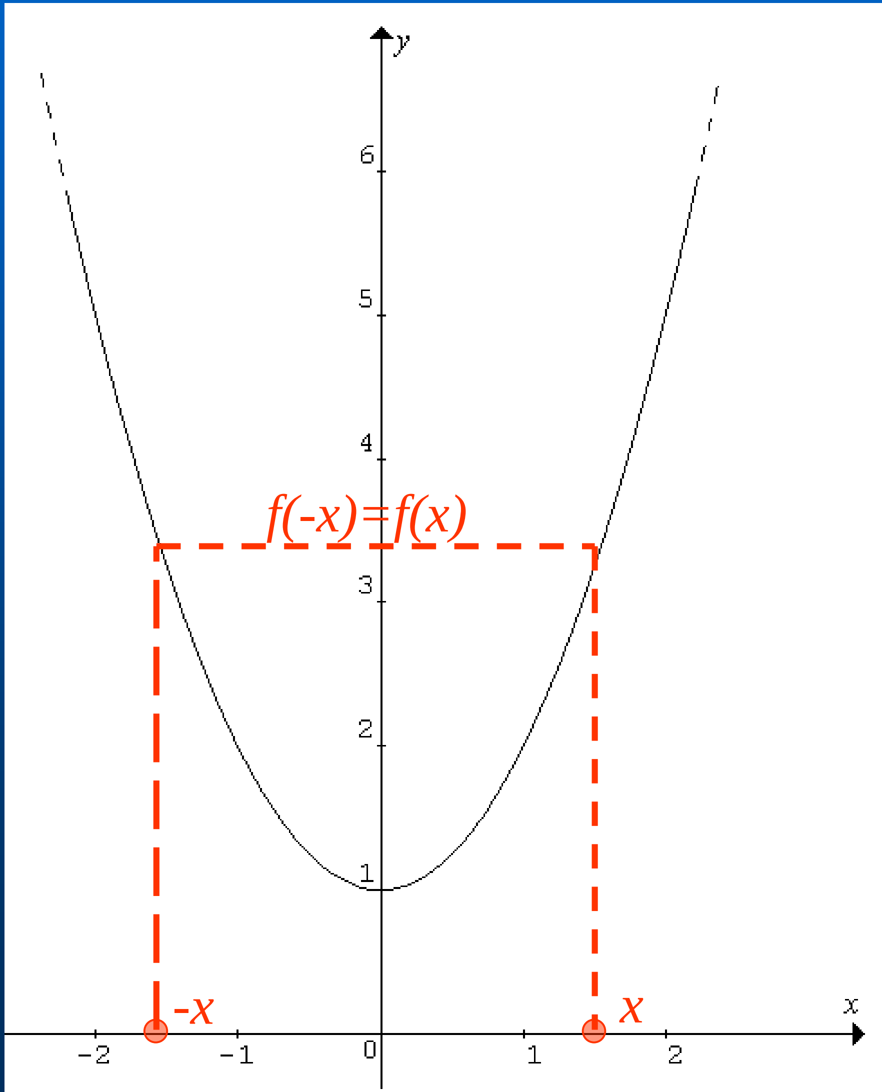
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & se \quad 1 \le x < 2 \\ x & se \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Funzioni pari, dispari

- La funzione

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y=f(x)$$

è pari se e solo se per ogni $x \in A$ $f(-x)=f(x)$



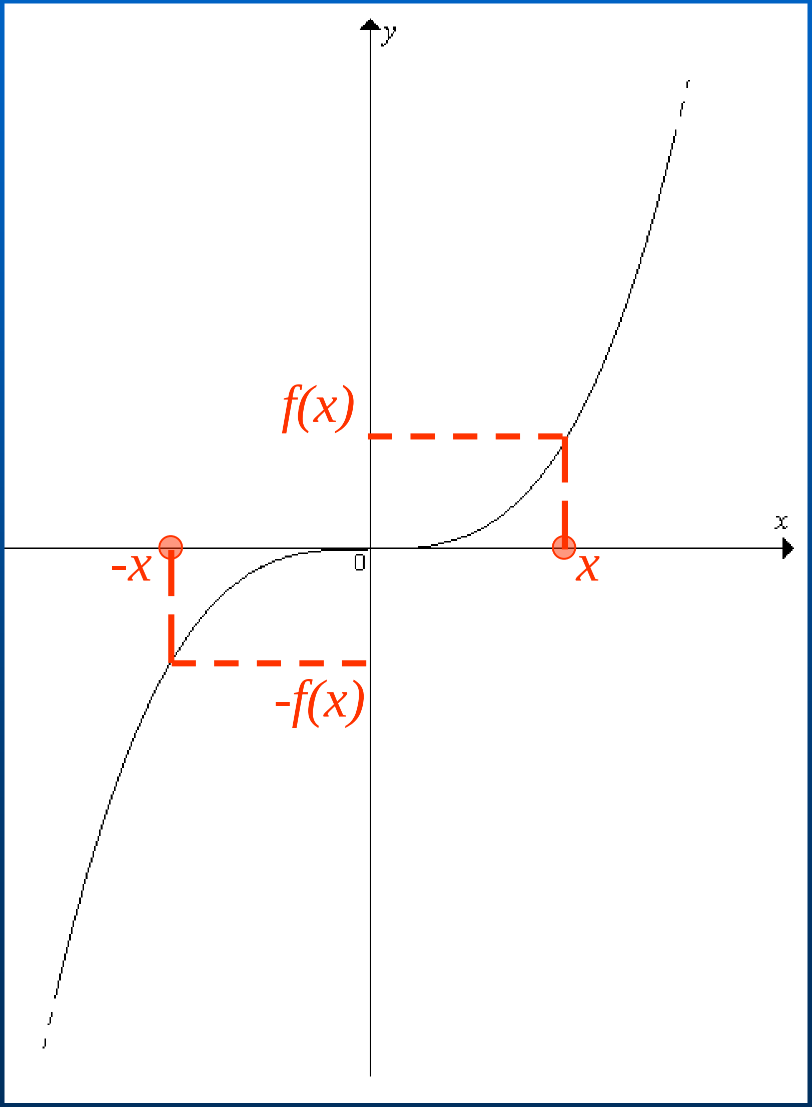
Funzioni pari, dispari

- La funzione

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y=f(x)$$

è dispari se e solo se

per ogni $x \in A$ $f(-x)=-f(x)$



$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y=f(x)$$

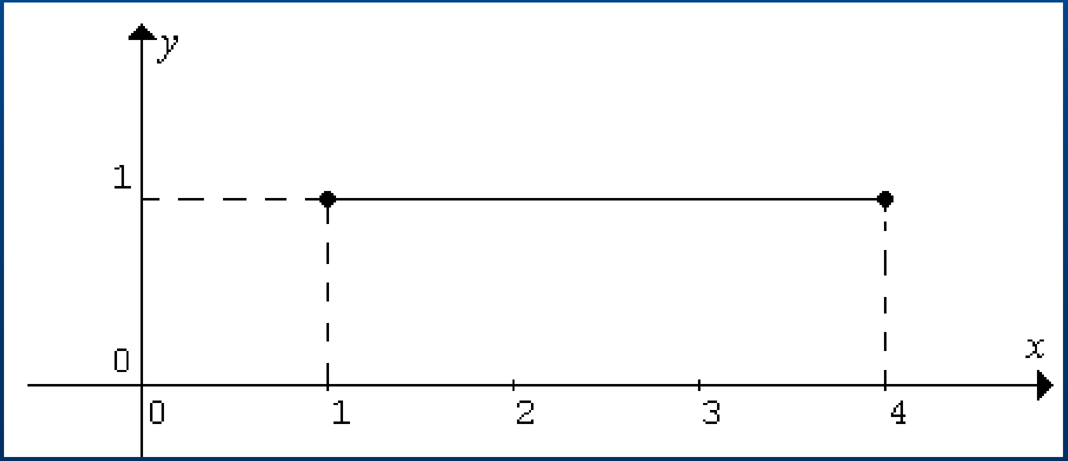
Funzioni monotòne

- La funzione si dice **costante** se per ogni $x \in A$ *f(x)=c con c numero reale.*

  In simbolo: *f è costante* se

$$\forall x \in A \quad f(x) = c \qquad c \in R$$

Esempio: y=1

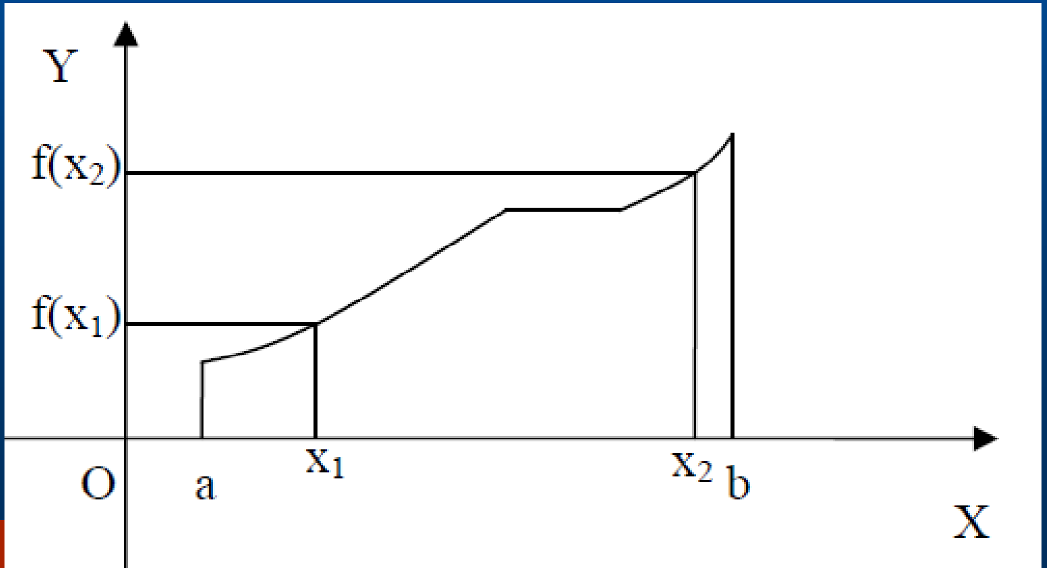


Funzioni monotòne

- Una funzione y = f(x), definita in un intervallo [a,b], si dice **crescente** in [a,b] se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in [a, \quad b] \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

Esempio:

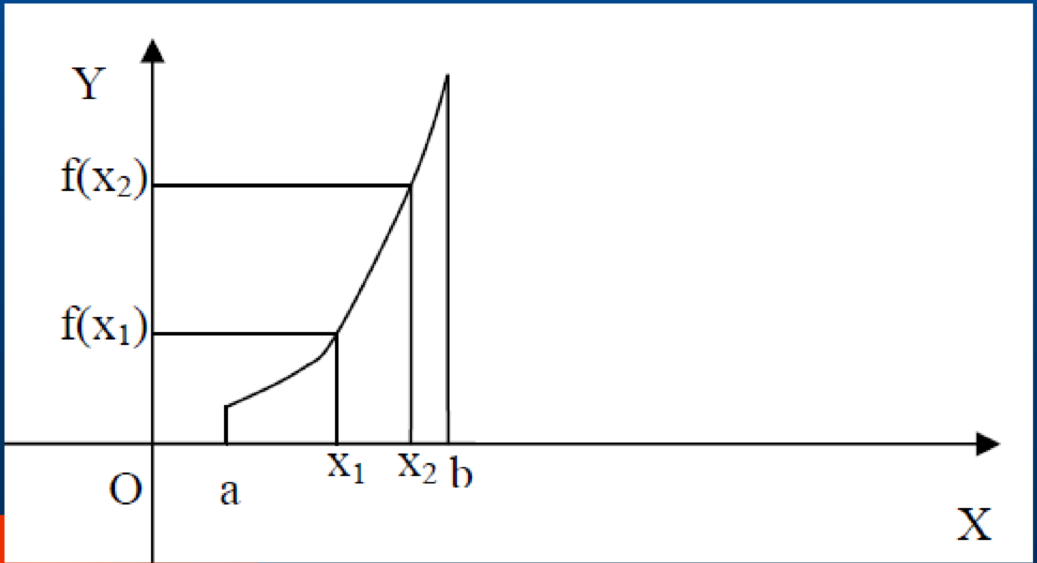


Funzioni monotòne

- Una funzione y = f(x), definita in un intervallo [a,b], si dice **strettamente crescente** in [a,b] se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in [a,\ \ b] \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Esempio:

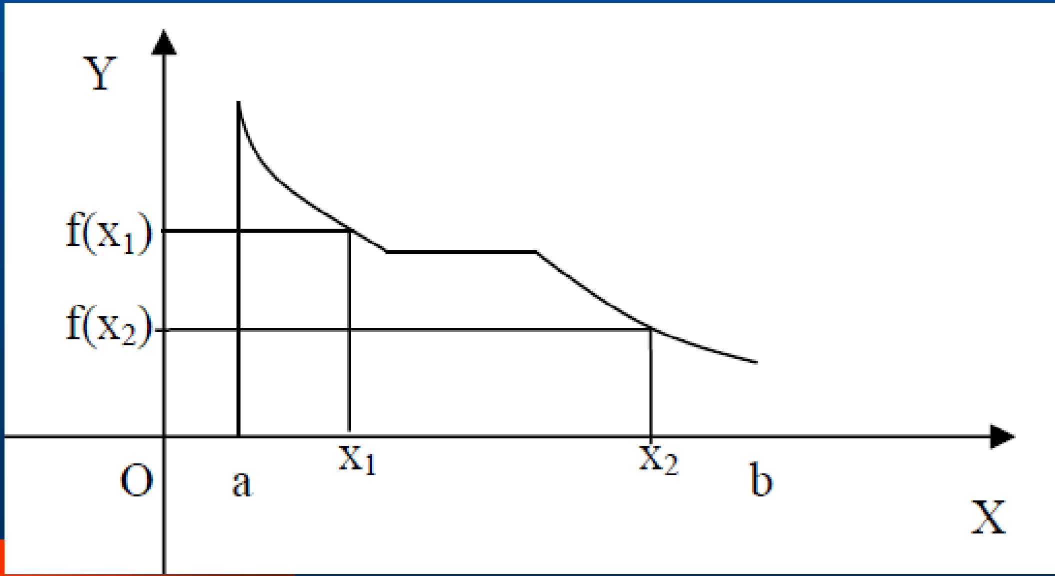


Funzioni monotòne

- Una funzione y = f(x), definita in un intervallo [a,b], si dice de**crescente** in [a,b] se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in [a,\quad b] \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

Esempio:

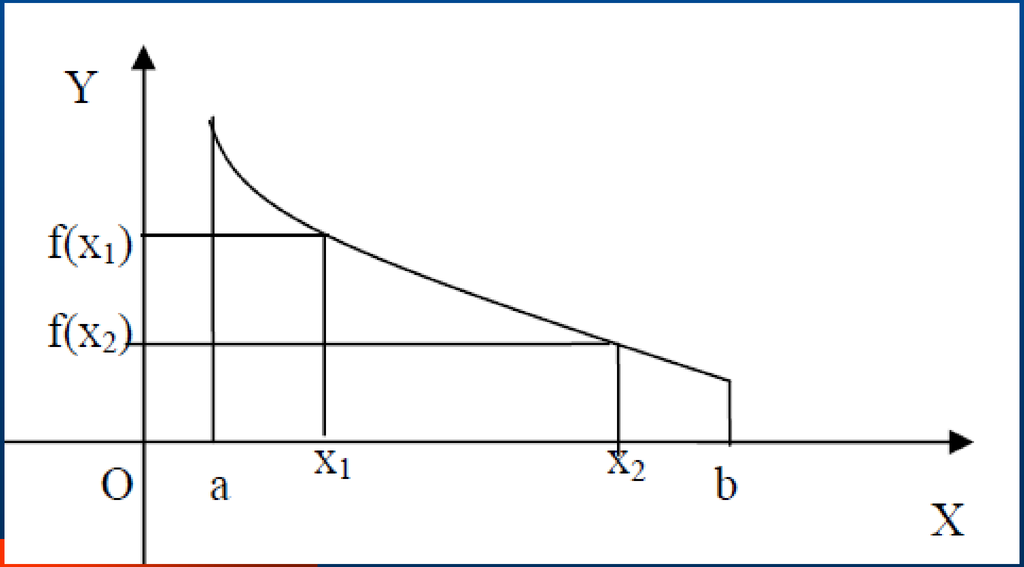


Funzioni monotòne

- Una funzione y = f(x), definita in un intervallo [a,b], si dice **strettamente decrescente** in [a,b] se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in [a, \quad b] \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Esempio:



Punti estremanti

- I **punti estremanti** sono i punti in cui possiamo avere un valore di massimo o di minimo relativo
- x_0 è un punto di **massimo relativo** per la funzione f se esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I$ $f(x) \leq f(x_0)$
- x_0 è un punto di **minimo relativo** per la funzione f se esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I$ $f(x) \geq f(x_0)$